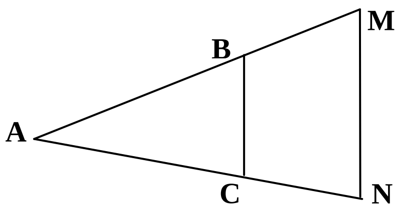
CHAPITRE 3

Le théorème de Thalès et sa réciproque

I – Agrandissement ou réduction d'un triangle :

Sur la figure ci-dessous :

- les points A, B et M sont alignés ;
- les points A, C et N sont alignés ;
- les droites (BC) et (MN) sont parallèles.



→ Le triangle **AMN** est un **agrandissement** du triangle **ABC**.
Toutes les longueurs sont multipliées par le **rapport d'agrandissement k**, avec $k > 1$.

→ Le triangle **ABC** est une **réduction** du triangle **AMN**.

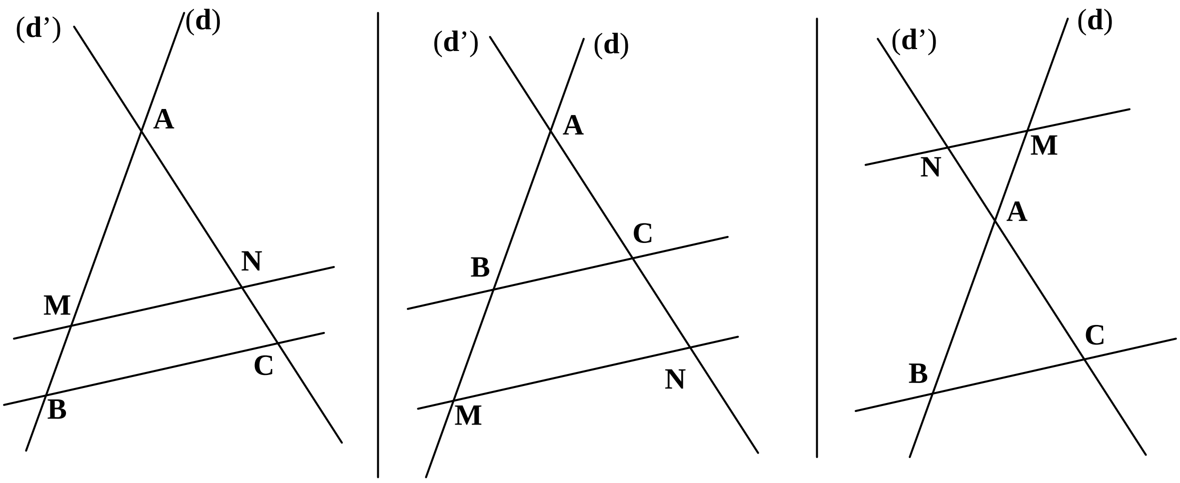
Toutes les longueurs sont multipliées par le **rapport de réduction k'**, avec $0 < k' < 1$, avec $\boxed{k' = \frac{1}{k}}$.

Remarque : Les mesures des angles de la figure sont inchangées.

II – Théorème de Thalès :

On considère
→ deux droites (d) et (d') sécantes en A ;
→ deux points B et M de (d) distincts de A ;
→ deux points C et N de (d') distincts de A.

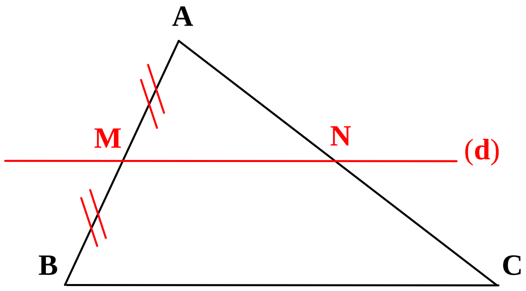
Il existe alors trois configurations possibles :



Théorème de Thalès : (*pour les trois configurations précédentes*)

Si les droites (**BC**) et (**MN**) sont parallèles, alors on a : $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$.

<u>Cas particulier :</u> Dans l’une des trois configurations possibles, si en plus M est le milieu de [AB], on retrouve le **<u>2ème théorème des milieux</u>** :
« Dans un triangle, si une droite passe par le milieu d’un côté et est parallèle à un autre côté, alors elle coupe le troisième côté en son milieu. »

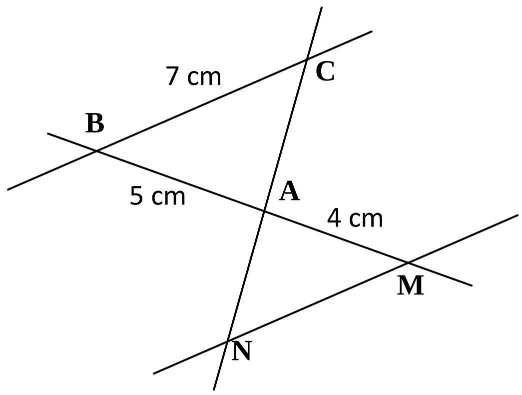


M milieu de [AB]
(d) // (BC)
$\Downarrow$ **2ème théorème des milieux**
N milieu de [AC]

III – Applications du théorème de Thalès :

1) Calculer une longueur :

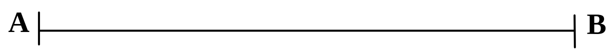
Sur la figure ci-dessous, on donne : A ∈ (BM), A ∈ (CN) et (BC) // (MN).



*On cherche à calculer la longueur **MN**.* [***<u>Résolution 1</u>***]

2) Partager un segment :

On considère le segment [AB] ci-dessous :



*On cherche à construire le point **M** du segment [AB] tel que* $AM = \frac{3}{5}AB$. [***<u>Résolution 2</u>***]

3) Prouver que deux droites ne sont pas parallèles :

<u>Conséquence du théorème de Thalès :</u>

On considère
→ deux droites (d) et (d’) sécantes en A ;
→ deux points B et M de (d) distincts de A ;
→ deux points C et N de (d’) distincts de **A**.

Si $\frac{\mathbf{AM}}{\mathbf{AB}} \neq \frac{\mathbf{AN}}{\mathbf{AC}}$, alors les droites (**BC**) et (**MN**) ne sont pas parallèles.

IV – Réciproque du théorème de Thalès :

On considère toujours
- $\rightarrow$ deux droites (d) et (d') sécantes en A ;
- $\rightarrow$ deux points B et M de (d) distincts de A ;
- $\rightarrow$ deux points C et N de (d') distincts de A.

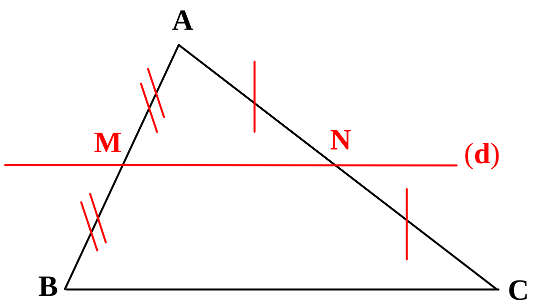
On a donc toujours les <u>trois mêmes configurations possibles</u>.

<u>Réciproque du théorème de Thalès :</u>

Si $\frac{\mathbf{AM}}{\mathbf{AB}} = \frac{\mathbf{AN}}{\mathbf{AC}}$ **et** si les points **A**, **B**, **M** d'une part, et les points **A**, **C**, **N** d'autre part, sont alignés <u>dans le même ordre</u>, alors les droites (**BC**) et (**MN**) sont parallèles.

<u>Cas particuliers :</u> Dans l'une des trois configurations possibles, si en plus M est le milieu de [AB] et N le milieu de [AC], on retrouve le **<u>1^er^ théorème des milieux</u>** :

« **Dans un triangle, si une droite passe par les milieux de deux côtés, alors elle est parallèle au troisième côté ; la longueur du segment ayant pour extrémités les milieux des deux côtés est alors égale à la moitié de celle du troisième côté.** »



M milieu de [AB]
N milieu de [AC]

$\downarrow$ **1er théorème des milieux**

(d) // (BC)

MN = $\frac{BC}{2}$